Математичка гимназија у Београду
Додатна настава из математике

Неједнакости 1

Миливоје Лукић
milivoje.lukic@gmail.com

Нека су a_1, a_2, ..., a_n позитивни реални бројеви, и нека је r реалан број. Тада је средина реда r бројева a_1, a_2, ..., a_n

$$M_r(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[r]{\frac{a_1^r + a_2^r + \ldots + a_n^r}{n}} \quad \text{за } r \neq 0, \tag{1}$$
$$M_0(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \tag{2}$$

Посебно истакнимо аритметичку средину као средину реда $r = 1$, квадратну као средину реда $r = 2$, геометријску као средину реда $r = 0$ и хармонијску као средину реда $r = -1$.

Неједнакост средина Нека су a_1, a_2, ..., a_n позитивни реални бројеви, и r и s реални бројеви такви да је $r < s$. Тада је

$$M_r(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq M_s(a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{3}$$

при чему је једнакост испуњена ако и само ако је $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Коши-Шварцова неједнакост За све реалне бројеве x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n важи

$$\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right) \geq \left(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n\right)^2 \tag{4}$$

при чему једнакост важи ако и само ако су низови $(x_i)_{i=1}^n$ и $(y_i)_{i=1}^n$ пропорционални, то јест ако и само ако постоје реални бројеви α и β такви да је $\alpha x_i = \beta y_i$ за све $i = 1, 2, \ldots, n$.

Чебишевљева неједнакост Ако је $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ и $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$, онда је

$$\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)\left(y_1 + y_2 + \ldots + y_n\right) \leq n\left(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n\right) \tag{5}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ или $y_1 = y_2 = \ldots = y_n$.

1. Доказати да за сваки природан број n важи
$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\,.$$

2. Доказати да за све позитивне бројеве a, b, c такве да је $a + b > c$ и сваки природан број n, важи $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} > \sqrt[n]{c}$.

3. Доказати да за свако $r \in \mathbb{R}$ и било које позитивне реалне бројеве a_1, a_2,..., a_n важи
$$\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \leq M_r(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

4. Доказати да за све a, b, $c > 0$ важи $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

5. Доказати да за све a, b, $c > 0$ важи $bc/a + ac/b + ab/c \geq a + b + c$.

6. Доказати да за све a, b, $c > 0$ важи $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$.

7. Доказати да за све a, b, $c > 0$ важи $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.

8. Доказати да за све a, b, c, $d \geq 0$ важи
$$\sqrt{(a+b)(c+d)} + \sqrt{(a+c)(b+d)} + \sqrt{(a+d)(b+c)} \geq 6\sqrt[4]{abcd}\,.$$

9. Доказати да за све x, $y > 0$ важи $x/(x^4 + y^2) + y/(y^4 + x^2) \leq 1/(xy)$.

10. Доказати да важи $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc$ ако су:

    (а) a, b, c странице троугла;

    (б) a, b, c произвољни позитивни реални бројеви.

11. Доказати да ако за позитивне x, y важи $2x + 4y = 1$, онда важи $x^2 + y^2 \geq 1/20$.

12. Нека су a, b, c дужине страница троугла. Доказати да је
$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\ .$$

13. Доказати: ако је $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, онда $|xu + yv + zw| \leq 1$.

14. Доказати да је за све позитивне реалне бројеве x, y, z
$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}\ .$$

15. Нека су a, b, c, $d \geq 0$ такви да је $ab + bc + cd + da = 1$. Доказати да је
$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}\ .$$

16. Доказати да за a, b, c, $d > 0$ важи
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2\ .$$

17. Доказати да за позитивне реалне бројеве a, b, c, d важи
$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}\ .$$

18. Нека су a_1, a_2, $\ldots$, a_n позитивни реални бројеви. Доказати да је
$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2} + \frac{a_2^2}{a_2+a_3} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_n+a_1} \geq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{2}\ .$$

19. Нека је x, y, $z > 1$ и $1/x + 1/y + 1/z = 2$. Доказати да је
$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}\ .$$

20. Доказати да за све позитивне реалне бројеве a и b, и све природне n важи
$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}.$$

21. Доказати да за све p, $q > 0$ такве да $p + q = 1$ важи
$$\left(p + \frac{1}{p}\right)^2 + \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \geq \frac{25}{2}\ .$$

22. Одредити најмању могућу вредност израза $(x + y)(x + z)$, ако су x, y, $z > 0$ и
$$xyz(x + y + z) = 1.$$

23. Ако за бројеве a, b, c важи
$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{c^2}{a+b} + \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} \geq \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a}\,,$$
доказати да је $a = b = c$.

24. (ИМО2000.2) Нека су a, b, c позитивни реални бројеви, такви да је $abc = 1$. Доказати да је
$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1\ .$$